Exercice : Houle de Stokes

On considère un mouvement défini par la donnée des composantes du champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$ suivantes

$$
\begin{aligned}
U_1(x_1, x_2, x_3, t) &= u \exp(kx_3) \cos(kx_1 - \omega t), \\
U_2(x_1, x_2, x_3, t) &= 0 , \\
U_3(x_1, x_2, x_3, t) &= u \exp(kx_3) \sin(kx_1 - \omega t) .
\end{aligned}
\tag{1}
$$

1. Quel est le type de représentation du mouvement défini par la donnée du champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$.
2. D'un point de vue évolution temporelle, comment qualifieriez vous ce mouvement ?
3. Montrer que ce mouvement est isochore et irrotationnel.
4. Déterminer les tenseurs des taux de déformation $\underline{\underline{D}}(\underline{x}, t)$ et de rotation $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t)$ et interpréter leurs composantes.
5. Ecrire le système d'équations différentielles définissant les trajectoires.
6. Peut-on calculer analytiquement les trajectoires dans le cas général à l'aide de fonctions simples ?
7. Dans le cas particulier où $\epsilon = ku/\omega$ est très petit, on approche les trajectoires par des cercles dont les centres $\underline{a}$ seront choisis comme étant les positions associées dans la configuration de référence.
   Justifier cette approximation et expliciter le mouvement $\underline{X}(\underline{a}, t)$. En déduire l'évolution des configurations déformées $\Omega(t)$ issues de la configuration de référence Ω_0 définie par $a_3 \leq 0$.
8. Dans le cas $\epsilon \ll 1$, déterminer si possible la représentation Lagrangienne de ce mouvement. Justifier votre réponse. Ce mouvement est il défini $\forall t$?
9. Calculer l'accélération de ce mouvement dans le cas général et comparer avec le cas particulier $\epsilon \ll 1$.
10. Décrire qualitativement les trajectoires lorsque ϵ est d'ordre 1.
11. Comparer et interpréter physiquement les différents mouvements abordés dans ce problème.

Eléments de correction

Ce mouvement est décrit par une représentation Eulerienne. Le mouvement est instationnaire et périodique en temps. Le mouvement est isochore, car $\nabla \cdot \underline{U} = 0$, $\forall$ x and $t > 0$, et irrotationnel car $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \underline{U} = 0$, $\forall$ x and $t > 0$. Dans le cas général, il n'est pas possible de calculer analytiquement les trajectoires. Dans le cas $\epsilon \ll 1$, on peut approcher $\underline{U}[x(t), t]$ par $\underline{U}[a, t]$ si l'on suppose que la trajectoire $\underline{x}(t)$ associée à la position de référence $\underline{a}$ reste proche de $\underline{a}$. Dans ce cas, on peut calculer explicitement ces trajectoires et l'on obtient

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= a_1 - \frac{u}{\omega} \exp(kx_3) \sin(ka_1 - \omega t), \\
x_2(t) &= a_2 , \\
x_3(t) &= a_3 + \frac{u}{\omega} \exp(kx_3) \cos(ka_1 - \omega t) .
\end{aligned}
\tag{2}
$$

L'évolution de la frontière $\Omega(t)$ est donc celle d'un champ de vagues, dites "trochoïdales", se propageant à la vitesse ω/k dans la direction x_1.

L'accélération $\underline{\Gamma} = \partial_t \underline{U} + U_1 \partial_1 \underline{U} + U_3 \partial_3 \underline{U}$ est telle que $\Gamma_1 = \omega u \exp(kx_3) \sin(kx_1 - \omega t)$, $\Gamma_2 = 0$ et $\Gamma_3 = -\omega u \exp(kx_3) \cos(kx_1 - \omega t) + ku^2 \exp(2kx_3)$. Lorsque ϵ est petit, on peut approcher $\Gamma(\underline{x}(t), t)$ par $\Gamma(\underline{a}, t)$ si $\underline{x}(t)$ est la trajectoire correspondant $\underline{a}$. Le deuxième terme de Γ_3 est négligeable devant le premier car $ku^2/(\omega u) = \epsilon$ est petit.
Lorsque ϵ n'est plus petit, les particules ont une vitesse $u \exp(kx_3)$ plus grande en haut du cercle qu'en bas.

En plus d'un mouvement quasi-circulaire, ces particules sont animées d'un mouvement de dérive dans la direction x_1.
Dans la houle de Stokes, les trajectoires circulaires sont telles que la frontière du domaine est un train de vagues qui se propage, comme dans le cas d'une houle réelle.