Exemple I

Mouvement d'extension

Dans une repère cartésien orthonormé R d'un référentiel $\mathcal{R}$, on étudie le mouvement défini $\forall t > 0$ par :

$$x_1 = X_1(1 + \alpha t),\ x_2 = X_2,\ x_3 = X_3,\quad \alpha > 0\ .$$

- Déterminer la vitesse et les trajectoires.
- Donner la représentation Eulérienne du mouvement.
- Déterminer les lignes de courant l'instant $T > 0$.

Solutions

- On a bien $J(\mathbf{X}, t) = 1 + \alpha t > 0$.
- $U_1 = \alpha X_1$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$.
- Trajectoires : droites // à $\underline{e_1}$.
- $U_1 = \alpha x_1/(1 + \alpha t)$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$.
- Mouvement semi-permanent : trajectoires et lignes de courant identiques.

Exemple II

Mouvement rectiligne

Dans une repère cartésien orthonormé R d'un référentiel $\mathcal{R}$, on étudie le mouvement défini $\forall t > 0$ par :

$$x_1 = X_1 + \alpha t X_2,\ x_2 = X_2 + \alpha t X_1,\ x_3 = X_3,\quad \alpha > 0\ .$$

- Sur quel interval de temps ce mouvement est-il défini ?
- Déterminer les trajectoires.
- Donner la représentation Eulérienne de ce mouvement.

Solutions

- $J(\mathbf{X}, t) = 1 - \alpha^2 t^2$: mouvement défini que pour $t < 1/\alpha$.
- Trajectoires : droites parallèles au plan $(\underline{e_1}, \underline{e_2})$ si X_1 ou X_2 est non nul.
- $U_1 = \alpha(x_2 - \alpha t x_1)/(1 - \alpha^2 t^2)$, $U_2 = \alpha(x_2 - \alpha t x_1)/(1 - \alpha^2 t^2)$, $U_3 = 0$.
- Mouvement semi-permanent : trajectoires et lignes de courant identiques.

Exemple III

Mouvement hyperbolique

Dans une repère cartésien orthonormé R d'un référentiel $\mathcal{R}$, on étudie le mouvement défini $\forall t > 0$ par :

$$U_1 = \alpha x_2\ , U_2 = \alpha x_1\ , U_3 = 0,\quad \alpha > 0\ .$$

- Déterminer les lignes de courant à l'instant T.
- Donner la représentation Lagrangienne du mouvement.

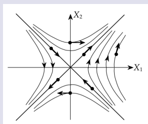

FIGURE: Hyperboles

Exemple III

Solutions

- Mouvement plan stationnaire.
- Les lignes de courant sont identiques aux trajectoires et sont indépendantes du temps. Ce sont des hyperboles

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = X_1^2 - X_2^2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

- Représentation Lagrangienne : Intégration du système $dx_1 = \alpha x_2\, dt$, $dx_2 = \alpha x_1\, dt$, $dx_3 = 0$, avec les conditions initiales $x_i = X_i$ pour $t = 0$. On obtient

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cosh \alpha t + X_2 \sinh \alpha t \\ x_2 = X_1 \sinh \alpha t + X_2 \cosh \alpha t \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$